INTRODUÇÃO A LÓGICA

1 O QUE É LÓGICA?

Devemos primeiramente proporcionar uma visão informal e intuitiva dos assuntos a que a lógica diz respeito.

Responder a pergunta do tipo “de que se trata?” é uma questão bastante difícil.

As palavras “lógica” e “lógico” são familiares a todos nós. Falamos freqüentemente de comportamento “lógico” em contraste com um comportamento “ilógico”, de procedimento “lógico” em oposição a um “ilógico”, de explicação “lógica”, de espírito “lógico” etc. Em todos esses casos, a palavra “lógico” é usada, fundamentalmente, na mesma acepção de “razoável”. Uma pessoa com espírito “lógico” é uma pessoa “razoável”; um procedimento “irrazoável” é aquele que se considera “ilógico”. Todos estes usos podem ser considerados como derivativos de um sentido mais técnico dos termos “lógico” e “ilógico” para caracterizar os argumentos racionais. Esta conexão tornar-se-á cada vez mais clara à medida que o estudante avance na leitura e amplie os seus conhecimentos no assunto.

Evidentemente, para compreender o que é, de fato, lógica, uma pessoa tem que estudá-la. Neste primeiro texto, tentaremos oferecer ao leitor uma explicação rudimentar e aproximada do que é lógica.

O estudo da lógica é o **estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto**. Naturalmente, esta definição não pretende afirmar que só é possível argumentar corretamente com uma pessoa que tenha estudado lógica. Afirmá-lo seria tão errôneo quanto pretender que só é possível correr bem se estudou física e fisiologia necessárias para a descrição dessa atividade. Alguns excelentes atletas ignoram completamente os processos complexos que se desenrolam dentro deles próprios quando praticam o esporte. E não seria necessário acrescentar que os professores veteranos, os quais sabem mais dessas coisas, teriam um desempenham muito fraco se arriscassem a sua dignidade num campo de atletismo. Mesmo dispondo de igual equipamento muscular e nervos básicos, a pessoa que sabe pode não superar o “atleta natural”.

Mas, dada a argúcia inata do intelecto, uma pessoa com conhecimento de lógica tem maior probabilidade de raciocinar corretamente do que aquela que não se aprofundou nos princípios gerais implicados nessa atividade. Há muitas razões para isso. Em primeiro lugar, o estudo adequado da lógica abordá-la-á tanto como arte, tanto como ciência, e o estudante deverá fazer exercícios sobre todos os aspectos da teoria que aprende. Nisto, como em tudo, a prática ajuda o aperfeiçoamento. Em segundo lugar, uma parte tradicional do estudo da lógica consiste no exame e na análise dos **métodos incorretos do raciocínio**, ou seja, das **falácia**s. Esta parte da matéria não só dá uma visão mais profunda dos princípios do raciocínio em geral, como o conhecimento desses erros auxilia também a evitá-los. Por último, o estudo da lógica proporciona ao estudante certas técnicas e certos métodos de fácil aplicação para determinar a correção ou incorreção dos raciocínios. O valor desse conhecimento reside no fato de ser menor a probabilidade de se cometerem erros, quando é possível localizá-los mais facilmente.

A lógica tem sido freqüentemente definida como a ciência das leis do pensamento. Mas esta definição, conquanto ofereça um indício sobre a natureza da lógica, não é exata. Em primeiro lugar, o pensamento é um dos processos estudados pelos psicólogos. A lógica não pode ser "a ciência das leis do pensamento", porque a psicologia também é uma ciência que trata das leis do pensamento (entre outras coisas). E a lógica não é um ramo da psicologia: é um campo de estudo separado e distinto.
Obs: Todo raciocínio é pensamento, mas nem todo pensamento é raciocínio.

Uma outra definição comum da lógica é a que a caracteriza como ciência do raciocínio. Esta definição evita a segunda objeção e, portanto, é melhor, mas ainda não é adequada. O raciocínio é um gênero especial de pensamento no qual se realizam inferências ou se derivam conclusões a partir de premissas. Contudo, ainda é uma espécie de pensamento e, por conseguinte, também faz parte do material de estudo do psicólogo.

A lógica não tem uma definição, podemos conceitua-la através de exemplos. A distinção entre raciocínio correto e o incorreto é o problema central que incumbe à lógica tratar.

Se poderia dizer que a lógica investiga a relação de correspondência que regula a relação entre as premissas e a conclusão de um argumento válido.

2 O QUE É UM ARGUMENTO?

Para aclarar a explicação de lógica proposta na seção antecedente, será útil apresentar e examinar alguns dos termos especiais empregados no estudo de lógica. A inferência é um processo pelo qual se chega a uma proposição, afirmada na base de uma ou mais proposições aceitas como ponto de partida do processo.

As proposições são verdadeiras ou falsas e nisto diferem das perguntas, ordens e exclamações. Só as proposições podem ser afirmadas ou negadas; uma pergunta pode ser respondida, uma ordem dada e uma exclamação proferida, mas nenhuma delas pode ser afirmada ou negada, nem é possível julgá-las como verdadeiras ou falsas. É necessário distinguir as sentenças das proposições para cuja afirmação elas podem ser usadas. Duas sentenças (ou orações declarativas) que constituem claramente duas orações distintas, porque consistem de diferentes palavras, dispostas de modo diferente, podem ter o mesmo significado, no mesmo contexto, e expressar a mesma proposição.

Por exemplo:

João ama Gertrudes.
Gertrudes é amada por João.

São duas sentenças diferentes, pois a primeira contém três palavras, ao passo que a segunda contém cinco; a primeira começa com a palavra "João", enquanto que a segunda começa com a palavra "Gertrudes". Contudo as duas sentenças têm exatamente o mesmo significado. Costuma-se usar as palavras “proposição”, “enunciado” ou “declaração” para designar o significado de uma sentença ou oração declarativa.

A diferença entre orações e proposições é evidenciada ao observar-se que uma oração declarativa faz sempre parte de uma linguagem determinada, a linguagem em que ela é enunciada, ao passo que as proposições não são peculiares a nenhuma das linguagens em que podem ser expressas. Considere as três sentenças seguintes:

Chove.
It is raining.
Il pleut.

As três são certamente diferentes, visto que a primeira está em português, a segunda em inglês e a terceira em francês. Contudo, têm todas um único significado.

Em diferentes contextos, uma única sentença pode ser usada para fazer declarações muito diferentes. Por exemplo:

O atual Presidente do Brasil é um democrata.

Esta sentença, proferida em diferentes épocas, seria usada para enunciar proposições diferentes.

No contexto do Curso de Lógica Formal que ora iniciamos, esses aspectos não apresentam muita relevância, conquanto sejam de grande importância para o estudo da lógica como um todo. O centro das atenções durante esse curso será o da forma com que se apresentam as proposições. Veremos que se pode determinar a validade de uma proposição pela análise de sua forma, e que essa mesma análise serve para todas as proposições que tiverem a mesma forma.

O lógico não está interessado no processo de inferência, mas nas proposições que são os pontos inicial e final desse processo assim como nas relações entre elas.

Um processo de inferência utiliza-se do que se chama "**argumento**". Um argumento é qualquer grupo de enunciados tal que se afirme ser um deles derivado dos outros. Freqüentemente, a palavra "argumento" é usada para indicar o processo de inferência, mas em lógica, tem o sentido técnico apresentado. Um argumento não é uma simples coleção de enunciados - ele apresenta uma estrutura própria. Na descrição dessa estrutura são usualmente empregados os termos "premissa" e "conclusão". A conclusão de um argumento é aquele enunciado que se afirma com base nos outros enunciados desse mesmo argumento, e, por sua vez, esses outros enunciados que se apresentam como provas ou razões para aceitar a conclusão são as premissas desse argumento.

Exemplo: Um dos argumentos mais conhecidos (devido ao seu aspecto ubíquo como exemplo na lógica elementar) é:

Todos os homens são mortais. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

Obs: 1) Os dois primeiros enunciados são premissas que servem para provar a conclusão, Sócrates é mortal.
2) Algumas vezes os filósofos traçam uma distinção entre enunciados e proposições, mas aqui não é necessário fazê-la. Contudo, ocasionalmente, acharemos importante distinguir entre sentenças (seqüências de palavras) declarativas e enunciados ou proposições (isto é, significados ou idéias) que elas expressam. Essa diferenciação é importante, por exemplo, quando tratamos de sentenças ambíguas, que podem expressar dois ou mais enunciados. Mas, onde não houver perigo de confusão, evitaremos prolixidade, suprimindo a distinção. Freqüentemente utilizaremos o termo "argumento" para denotar seqüências de enunciados (como na nossa definição) e seqüências de sentenças que os expressem.

3 DEDUÇÃO E INDUÇÃO

Os argumentos estão tradicionalmente divididos em dois tipos: **dedutivos** e **indutivos**. Se bem que todo argumento implique a pretensão de que suas premissas forneçam a prova da verdade de sua conclusão, somente um argumento dedutivo envolve a pretensão de que suas premissas fornecem uma prova conclusiva. No caso dos argumentos dedutivos, os termos técnicos "válido" e "inválido" são usados no lugar de "correto" e "incorreto". Um raciocínio dedutivo é válido quando suas premissas, se verdadeiras, fornecem provas convincentes para sua conclusão, isto é, quando as premissas e a conclusão estão de tal modo relacionadas que é absolutamente impossível as premissas serem verdadeiras se a conclusão tampouco for verdadeira. Todo raciocínio (ou argumento) dedutivo é válido ou inválido; a tarefa da lógica dedutiva é esclarecer a natureza da relação entre as premissas e a conclusão em argumentos válidos, e assim, nos permitir que discriminemos os argumentos válidos dos inválidos. A primeira parte de nosso estudo será da lógica (formal) dedutiva.

Um raciocínio indutivo, por outro lado, envolve a pretensão, não de que suas premissas proporcionem provas convincentes da verdade de sua conclusão, mas de que somente forneçam algumas evidências disso. Os argumentos indutivos não são "válidos" ou "inválidos" no sentido em que esses termos se aplicam aos argumentos dedutivos. Os raciocínios indutivos podem, é claro, ser avaliados como melhores ou piores, segundo o grau de verossimilhança ou probabilidade que as premissas confiram às respectivas conclusões.

Analisemos os argumentos a seguir:

1) Quase todos os brasileiros gostam de futebol.
   Cláudio é brasileiro.
   Portanto, Cláudio gosta de futebol.

2) Ouve-se falar muito que os cariocas passam mais tempo na praia e nos bares bebendo do que no seu trabalho.
   Clóvis viveu 10 anos no Rio de Janeiro.
   Portanto, não deve ser uma boa idéia contratá-lo para esse cargo que exige tanta dedicação.

3) Todo gaúcho gosta de churrasco.
   Paulo é gaúcho.
   Portanto, Paulo gosta de churrasco.

Os argumentos (1) e (2) são indutivos, pois, em ambos, as premissas não pretendem fornecer provas conclusivas da verdade da conclusão. Pode-se avaliar (e isso será feito em textos paralelos a esse curso) o grau de probabilidade de que a verdade das premissas leve à verdade da conclusão, classificando os argumentos indutivos em "fortes" e "fracos". No caso do argumento (1), o grau de probabilidade de sua indutividade depende do que se entende por "quase todos". Se "quase todos" significa "99 %" da população, poderíamos dizer que o argumento seria "indutivo forte". Se a porcentagem da população que representa "quase todos" não fosse muito grande, diríamos que o argumento é "indutivo fraco".

Já o argumento (2) demonstra textualmente ser "fraco", já que a expressão "ouve-se falar" lembra "boataria" que não nos dá margem alguma de certeza do que se está afirmando. Ademais, o fato do "Clóvis" ter vivido no Rio de Janeiro por 10 anos não garante, em grau algum, que ele tenha que ter sido influenciado por hábitos supostamente comuns aos cariocas.

O argumento (3) é dedutivo. A veracidade das premissas garante-nos a veracidade da conclusão.

Dedicaremos a maior parte desse curso ao estudo de argumentos dedutivos.

4 VERDADE E VALIDADE

<u>Verdade</u> e <u>falsidade</u> podem ser predicados das <u>proposições</u>, nunca dos argumentos. Do mesmo modo, propriedades de <u>validade</u> ou <u>invalidade</u> só podem pertencer a <u>argumentos dedutivos</u>, mas nunca a enunciados. Existe uma conexão entre a validade ou invalidade de um argumento e a verdade ou falsidade de suas premissas e conclusões, mas essa conexão de modo algum é simples. Alguns dos argumentos válidos contêm apenas enunciados verdadeiros, como, por exemplo:

Todas as baleias são mamíferos.
Todos os mamíferos têm pulmões.
Portanto, todas as baleias têm pulmões.

Mas um argumento pode conter exclusivamente enunciados falsos e, apesar disso, ser válido, como por exemplo:

Todas as aranhas têm seis pernas.
Todos os seres de seis pernas têm asas.
Portanto, todas as aranhas têm asas.

Este argumento é válido porque, se suas premissas fossem verdadeiras, sua conclusão também teria que ser verdadeira, mesmo no caso em que, de fato, fossem todas falsas. Por outro lado, se refletirmos sobre o argumento:

Se eu possuísse todo o ouro de Serra Pelada, seria muito rico.
Não possuo todo o ouro de Serra Pelada.
Portanto, não sou muito rico.

Vemos que, embora suas premissas e sua conclusão sejam verdadeiras, o raciocínio não é válido. Que as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa, se bem que não o sejam de evidência imediata, é fácil ver com clareza, considerando-se que, se eu herdasse um milhão de reais, as premissas continuariam sendo verdadeiras, mas a conclusão seria falsa. Podemos ilustrar ainda melhor este ponto, mediante o seguinte argumento, que tem a mesma forma do precedente:

Se o Antônio Ermírio de Moraes possuísse todo o ouro de Serra Pelada, então ele seria muito rico.
O Antônio Ermírio de Moraes não possui todo o ouro de Serra Pelada.
Portanto, o Antônio Ermírio de Moraes não é muito rico.

As premissas deste raciocínio são verdadeiras e sua conclusão é falsa. Um tal argumento não pode ser válido, visto ser impossível que as premissas de um argumento válido sejam verdadeiras e sua conclusão falsa.

Os exemplos precedentes mostram-nos que há argumentos válidos com conclusões falsas, assim como argumentos inválidos com conclusões verdadeiras. Por conseguinte, a verdade ou falsidade da sua conclusão não determina a validade ou invalidade de um argumento.

5 O CÁLCULO PROPOSICIONAL

5.1 FORMALIZAÇÃO DE ARGUMENTOS

Enfocaremos, agora, o estudo das formas fundamentais de raciocínio de um ponto de vista sintático (gramatical). Deixaremos os aspectos semânticos dessas formas, isto é, ligados ao significado, à verdade ou falsidade dos enunciados que representam, para mais adiante.

Comecemos analisando três argumentos que têm a mesma forma:

1) Hoje é segunda-feira ou terça-feira.
Hoje não é segunda-feira.
Portanto, hoje é terça-feira.

2) Rembrandt pintou a Mona Lisa ou Michelângelo a pintou.
Não foi Rembrandt quem a pintou.
Portanto, Michelângelo pintou a Mona Lisa.

3) Ele é menor de 18 anos ou ele é jovem.
Ele não é menor de 18 anos.
Portanto, ele é jovem.

A forma comum desses três argumentos é:

P ou Q.
Não é o caso que P.
Portanto, Q.

Essa forma de argumento é conhecida como silogismo disjuntivo. É uma das regras básicas do cálculo proposicional. As letras "P" e "Q" funcionam como representantes de sentenças declarativas. Chamamos tais letras de letras sentenciais. Cada argumento que tem essa mesma forma pode ser obtido da forma substituindo as letras sentenciais por sentenças, cada ocorrência da mesma letra sendo substituída pela mesma sentença. Assim, por exemplo, o argumento 1 acima é obtido da forma substituindo-se "P" pela sentença "Hoje é segunda-feira" e "Q" pela sentença "Hoje é terça-feira". O resultado

4) Hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira.
Não é o caso que hoje é segunda-feira.
Portanto, hoje é terça-feira.

é uma simples variante gramatical do argumento 1. Para o estudo do cálculo proposicionais, ignoramos tais variações gramaticais, embora em contextos lógicos mais sofisticados ou filosóficos elas precisem ser consideradas. Um argumento assim obtido, de uma forma de argumento, é chamado uma instância da forma.

Preocupar-nos-emos, agora, com formas de argumento consistindo em letras sentenciais combinadas com expressões dos tipos: "não é o caso que", "e", "ou", "se ... então" e "se e somente se". Estas cinco expressões são chamadas operadores lógicos ou conectivos lógicos.

Utilizaremos de uma simbologia específica para o estudo do cálculo proposicional:

Operador lógico	Símbolo
Não é o caso que	$\sim$
E	&
Ou	$\vee$
Se ... então	$\rightarrow$
Se e somente se	$\leftrightarrow$

Obs.: Alguns autores de livros de lógica usam símbolos diferentes. Algumas alternativas mais comuns são:

Operador lógico	Símbolo
Não é o caso que	- ou $\neg$
E	. ou $\wedge$
Ou	$\vee$
Se ... então	$\supset$
Se e somente se	$\equiv$

O símbolo ~ é um símbolo que prefixa apenas uma sentença. Os outros quatro símbolos ligam dois enunciados para formar um enunciado composto. Esses últimos são chamados de operadores binários.

Uma composição constituindo-se de duas sentenças ligadas por "e" chama-se conjunção, e as suas duas sentenças componentes são chamadas conjunctos. A conjunção também pode ser expressa por palavras como "mas", "todavia", "embora", e outras que compartilham com o "e" a característica de ligar as duas sentenças - embora elas possam diferir na maneira de expressar outras nuanças dos enunciados anteriormente estabelecidos.

Um enunciado composto consistindo em dois enunciados ligados por "ou" chama-se disjunção (daí o nome "silogismo disjuntivo" para a forma de argumento discutido acima). Os dois enunciados são chamados disjunctos. Assim, a primeira premissa do argumento 1, "Hoje é segunda-feira ou terça-feira" - que para propósitos lógicos é o mesmo que "Ou hoje é segunda-feira ou hoje é terça-feira" - é uma disjunção cujos disjunctos são "Hoje é segunda-feira" e "Hoje é terça-feira". Costuma-se omitir o "ou" inicial do enunciado desde que isso não interfira no seu significado.

Os enunciados formados por "se ... então" chamam-se condicionais. O enunciado subseqüente a "se" é chamado antecedente; o enunciado restante, conseqüente.

Os enunciados formados por "se e somente se" chamam-se bicondicionais. Não há nome especial para os seus componentes. Um bicondicional pode ser considerado como uma conjunção de dois condicionais. Para ver isso, consideremos a sentença:

T é um triângulo se e somente se T é um polígono de três lados.

Obviamente, ela é uma variante de:

T é um triângulo se T é um polígono de três lados e T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados.

Que, por sua vez, é uma variante de:

Se T é um polígono de três lados, então T é um triângulo; e T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados.

Mas o que significa "T é um triângulo somente se T é um polígono de três lados"? "Somente se" é um outro modo de expressar um condicional. Enunciados da forma "P somente se Q" significam "Se P, então Q". (Num enunciado com "somente se", o que segue "se" é o conseqüente e não o antecedente). Portanto, o nosso bicondicional é um outro modo de dizer:

Se T é um polígono de três lados, então T é um triângulo, e se T é um triângulo, então T é um polígono de três lados.

Como a ordem dos conjunctos não altera o significado, a sentença pode ser reescrita como:

Se T é um triângulo, então T é um polígono de três lados; e se T é um polígono de três lados, então T é um triângulo.

Este exemplo ilustra uma regra geral: os enunciados da forma “P se e somente Q” são equivalentes (isto é, verdadeiros sob as mesmas condições) a enunciados da forma “Se P, então Q; e se Q, então P”; esta é a razão pela qual tais enunciados são chamados bicondicionais.

Os símbolos especiais definidos anteriormente facilitam o reconhecimento e comparação de formas de argumentos.

O silogismo disjuntivo é expresso como:

$P \vee Q$
$\sim P$
Portanto, Q.

Ou, é escrito horizontalmente, com as premissas separadas por vírgulas:

$P \vee Q, \sim P \vdash Q.$

Usamos o símbolo “$\vdash$” para representar a palavra “portanto”. Este símbolo, chamado **traço de asserção**, afirma que a fórmula à sua direita pode ser deduzida utilizando como premissas somente as fórmulas que estão à sua esquerda.

A linguagem consistindo nesta notação simbólica juntamente com as regras a serem empregadas chama-se cálculo proposicional (também chamado de cálculo de enunciado ou cálculo sentencial). O termo significa, simplesmente, “o sistema para executar cálculos com proposições”. O termo “cálculo” utilizado aqui tem origem na relação da lógica formal com as operações entre conjuntos, relação que aparece naturalmente quando estudamos qualquer uma dessas áreas.

Os “cálculos” que executaremos com este sistema são seqüências de inferências designadas para mostrar a validade de certas formas de argumento. Uma forma de argumento é **válida** se todas as suas instâncias são válidas; uma forma é inválida se pelo menos uma de suas instâncias é inválida. (Recordamos que uma instância de uma forma - isto é, um argumento particular - é válida somente quando é impossível que a sua conclusão seja falsa enquanto as suas premissas são verdadeiras. Em caso contrário, ela é inválida.) O silogismo disjuntivo, por exemplo, é uma forma de argumento válida; todo argumento desta forma é tal que <u>se as suas premissas forem verdadeiras</u>, a sua conclusão deverá ser verdadeira. Por outro lado, verificamos que nem todas as instâncias do silogismo disjuntivo são <u>corretas</u> - pode acontecer de uma ou mais premissas sejam falsas:

5)Rembrandt pintou a Mona Lisa ou Michelângelo a pintou.
Não foi Rembrandt quem a pintou.
Portanto, Michelângelo pintou a Mona Lisa.

A <u>forma</u> desse argumento é <u>válida</u>. A falha do argumento está no fato da primeira premissa ser falsa (se fosse verdadeira, a conclusão também seria).

A seguinte forma de argumento, ao contrário, é inválida:

Se P, então Q.
Q.
Portanto, P.

Em símbolos:

$P \rightarrow Q, Q \vdash P.$

Esta forma chama-se **afirmando o conseqüente**, pois a sua segunda premissa afirma o conseqüente da primeira. Embora algumas instâncias desta forma sejam argumentos válidos, outras não o são. A seguir, temos uma instância que é válida - e, sem dúvida, correta:

6)Se abril precede maio, então abril precede maio e maio segue abril.
Abril precede maio e maio segue abril.
Portanto, abril precede maio.

A conclusão deste argumento segue-se necessariamente de suas premissas, e são ambas verdadeiras. Contudo, a seguir, temos um argumento da mesma forma que é inválido:

7)Se tu estás estudando química, estão tu estás vivo.
Tu estás vivo.
Portanto, tu estás estudando química.

As premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa; daí o argumento é inválido.

Como qualquer forma que tem uma instância inválida é inválida, a invalidade do argumento 7 prova que **afirmando o conseqüente** é inválida. Embora a forma afirmando o conseqüente possa ter instâncias válidas (como o argumento 6), estas não são válidas em conseqüência de serem instâncias da forma afirmando o conseqüente . A razão para a validade do 6 é que a sua conclusão segue somente a validade da segunda premissa; a primeira premissa é supérflua e poderia ser omitida do argumento.

O cálculo proposicional fornece um modo de provar a validade para qualquer forma de argumento válida, composta somente de letras sentenciais e dos cinco operadores lógicos. O cálculo proposicional, entretanto, não fornece métodos para determinar se devemos ou não aceitar as premissas, os graus de probabilidade indutiva ou relevância, ou a presença de evidências contrárias. Estes outros aspectos da avaliação do argumento devem ser tratados por outros meios.

As técnicas de prova do cálculo proposicional constituem uma parte do estudo de sua sintaxe, isto é, de sua gramática. Inicialmente examinamos a sintaxe do cálculo proposicional mostrando como as formas de várias sentenças podem ser expressas como fórmulas (isto é, como as sentenças podem ser formalizadas) e determinando as regras gramaticais (regras de formação) para o cálculo.

O processo de formalização converte uma sentença ou argumento em uma forma sentencial ou uma forma de argumento, uma estrutura composta de letras sentenciais e operadores lógicos. As letras sentenciais em si não têm significado; mas no contexto de um problema, elas podem ser interpretadas como expressando proposições ou enunciados definidos. Essa interpretação, contudo, não é essencial para a forma. Num outro problema, as mesmas letras sentenciais podem ser estabelecidas para enunciados diferentes. Quando falamos acerca do significado de uma letra sentencial, estamos falando do seu significado sob uma particular interpretação especificada do problema.

A formalização de sentenças simples é fácil. Se interpretamos a letra sentencial "S", por exemplo, como 'Hoje é segunda-feira', então a sentença 'Hoje não é segunda-feira' será formalizada como "~S".

Mas, quando as sentenças contêm vários operadores lógicos, a formalização requer cuidados. Suponhamos, por exemplo, que queremos formalizar a sentença 'Hoje não é ambos, segunda-feira e terça-feira'. Não podemos, simplesmente, escrever "~S&T". O operador '~', tal como o sinal negativo na álgebra, aplica-se a menor parte possível da fórmula. Na forma algébrica '-1+3', por exemplo, o sinal '-' aplica-se somente a '1'; assim, a fórmula toda denota o número 2. Analogamente, em '~S&T', o sinal '~'se aplica somente a "S"; assim, '~S&T' significa 'Hoje não é segunda-feira e hoje é terça-feira", que não é o que queríamos dizer. Podemos, entretanto, estender a parte da fórmula na qual o operador se aplica, acrescentando parênteses. No caso algébrico, isto nos fornece a fórmula '-(1+3)', que denota o número -4. No caso lógico, fornece '~(S&T), que significa "Não é o caso que hoje é (ambos) segunda-feira e terça-feira", que é exatamente o que queríamos dizer.

Suponha que queremos formalizar a sentença 'Ou hoje é segunda-feira, ou hoje é terça-feira e dia da eleição'. Essa sentença é uma disjunção cujo segundo disjuncto é a conjunção 'Hoje é terça-feira e dia da eleição'. Portanto, ela é formalizada como 'S∨(T&E)'. Se esquecermos os parênteses e escrevermos 'S∨T&E', o significado não fica claro, pois poderia ser lida como uma conjunção cujo primeiro conjuncto é a disjunção 'Hoje é segunda-feira ou terça-feira'; assim, ela expressaria a sentença 'Hoje é segunda-feira ou terça-feira, e hoje é dia de eleição', que é diferente do enunciado original.

EXEMPLOS

1) Interprete a letra sentencial 'E' como 'Marta está estudando a lição' e a letra 'A' como 'Marta será aprovada no teste', e expresse a forma de cada sentença na notação do cálculo proposicional:

a) Marta está estudando a lição.
b) Marta não será aprovada no teste.
c) Não é o caso que se Marta está estudando a lição ela será aprovada no teste.
d) Se Marta não está estudando a lição, então não é o caso que Marta está estudando a lição e também será aprovada no teste.

e) Se Marta está estudando a lição e será aprovada no teste, então ela será aprovada no teste.
f) Marta está estudando a lição se e somente se será aprovada no teste.
g) Ou Marta está estudando a lição e será aprovada no teste, ou ela será aprovada no teste mas não está estudando a lição.

Observe que estas fórmulas são construídas a partir de três conjuntos de símbolos, que são elementos do vocabulário do cálculo proposicional:

Letras sentenciais: qualquer letra maiúscula é considerada uma letra sentencial; ocasionalmente, podemos acrescentar subscritos numéricos para obter outras letras sentenciais. Por exemplo, 'S_1', 'S_2', etc., são letras sentenciais diferentes de 'S'.

Operadores lógicos: $\sim$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Parênteses: (,).

Esses três conjuntos de símbolos constituem o **vocabulário** do cálculo proposicional. O vocabulário de uma linguagem formal é dividido em símbolos **lógicos e não-lógicos**. Os símbolos lógicos do cálculo proposicional são os operadores lógicos e parênteses; os símbolos não-lógicos são as letras sentenciais. Os símbolos não-lógicos têm interpretações diferentes em diferentes contextos; a letra sentencial 'P', por exemplo, pode representar 'Hoje é terça-feira' num problema e 'A professora está de aniversário' num outro. A função ou interpretação de símbolos lógicos sempre permanece fixa.

Uma fórmula do cálculo proposicional é uma seqüência qualquer de elementos do vocabulário. As respostas dos últimos exemplos apresentados anteriormente são todas fórmulas, mas também existem seqüências sem sentido, tal como '((&(P'. Para distinguir essas seqüências sem sentido de fórmulas significativas, introduzimos o conceito de fórmula gramatical ou **fórmula bem formada**, **fbf**, para abreviar (ou do inglês, **wff** – well-formed formula). Este conceito é definido pelas seguintes regras, chamadas **regras de formação**, que constituem a gramática do cálculo proposicional. As regras empregam letras gregas (as quais não pertencem ao vocabulário do cálculo proposicional) para denotar as fórmulas.

1) Qualquer letra sentencial é uma fbf.
2) Se ϕ é uma fbf, então $\sim\phi$ também o é.
3) Se ϕ e ψ são fbf, então $(\phi\&\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\rightarrow\psi)$ e $(\phi\leftrightarrow\psi)$ também o são.

Qualquer coisa não estabelecida como uma fbf por estas três regras não é uma fbf. As fbf complexas são construídas a partir das simples, por aplicações repetidas das regras de formação. Por exemplo, pela regra 1, 'A' e 'E' são fbf, donde segue-se, pela regra 2, que '~A' é fbf e, novamente pela mesma regra '~~A' também é fbf (pode-se colocar quantos sinais de negação que se queira e ainda se tem uma fbf); e, pela regra 3, '(~~A&E)' é fbf.

Note que a regra 3 estipula que cada vez que introduzimos um operador binário, introduzimos, também, um correspondente par de parênteses. Assim, enquanto ‘(A∨~E)’ é uma fbf, ‘A∨~E’ não é. Todavia, é claro que o par de parênteses que encerra toda a fórmula não é necessário para o significado da fórmula. Convencionaremos, informalmente, que o par de parênteses externo de fbf pode ser omitido.

EXERCÍCIOS

1) Utiliza as regras de formação para determinar quais das seguintes fórmulas são fbf e quais não são. Justifique a sua resposta.

a) ~~~R
→

b) (~R)
→ não é fbf, os parênteses só devem ser colocados quando usamos operadores binários.

c) PQ
→

d) P→Q
→

e) (P→Q)
→

f) ~(P→Q)
→

g) ((P∧Q)→R)
→

h) (P&Q)→R
→ pela nossa convenção, é fbf (sem a convenção, deveríamos escrever ‘((P&Q)→R)’ para termos uma fbf).

i) ~(~P∨(R&~S))
→

j) (P∨Q∨R)
→ não é fbf, pois a regra 3 permite combinar somente duas letras sentenciais de cada vez.

l) ((P∨Q)∨R)
→

As letras sentenciais são chamadas de fbf atômicas; todas as outras fbf são chamadas de moleculares ou compostas. Uma subfbf (subfórmula bem formada) é uma parte de uma fbf que é uma fbf. Assim, ‘P’ é uma subfbf de ‘~(P&Q)’, e ‘~R’ é uma subfbf de ‘~~R’. Cada fbf é considerada uma subfbf dela mesma.

Uma ocorrência particular de um operador numa fbf junto com a parte da fbf para a qual o operador se aplica chama-se **escopo** daquela ocorrência do operador. Dizemos que o escopo de uma ocorrência de um operador numa fbf é a menor subfbf que contém aquela ocorrência. Assim, na fbf ‘(~P&(Q→~R))’, o escopo da primeira ocorrência de ‘~’ é ‘~P’, e o escopo de ‘&’ é a fórmula toda. Na fórmula ‘~(P&(Q∨R))’, o escopo de ‘∨‘ é ‘(Q∨R)’, o escopo de ‘&’ é ‘(P&(Q∨R))’ e o escopo de ‘~’ é a fórmula toda.

Cada fbf tem exatamente um operador cujo escopo é a fórmula toda. Este operador é chamado **operador principal** daquela fbf. Uma fbf cujo operador principal é ‘&’ (sem considerar outros operadores que a fbf contém) chama-se **conjunção**; uma fbf cujo operador principal é ‘~’ é uma **negação** e assim sucessivamente.

Tendo definido rigorosamente a nossa linguagem formal, podemos utilizá-la para expor as formas de argumentos.

Exercícios

1) Formalizar os seguintes argumentos num formato horizontal, usando as letras sentenciais indicadas. Utilize os indicadores de premissa e conclusão para distinguir as premissas das conclusões. De acordo com nossa convenção, os parênteses externos serão omitidos (os significados das letras sentenciais sugeridas entre parênteses devem ser subentendidos quando não forem especificados):

a) Se Deus existe, então a vida tem significado. Deus existe. Portanto a vida tem significado. (D, V)
→ D → V, D ├ V

b) Se não houve um temporal naquela cidade hoje de madrugada, ele já teria chegado aqui. Mas ele não chegou aqui ainda. Portanto, houve um temporal naquela cidade nesta madrugada.(T,C)

c) Claudia será aprovada se e somente se estudar muito. (A, E)

d) Se a vítima tinha dinheiro nos bolsos, então roubo não foi o motivo do crime. Mas o motivo do crime foi ou o roubo, ou a vingança. Portanto, o motivo do crime foi a vingança. (D, R, V)

e) Ele pode ter muitos amigos, somente se os respeitar como indivíduos. Se os respeita como indivíduos, então não pode esperar que todos se comportem da mesma maneira. Ele tem muitos amigos. Portanto, não espera que todos se comportem da mesma maneira. (A, R, E)

f) Se o caixa e o tesoureiro tivessem apertado o botão de alarme, o cofre-forte ter-se-ia fechado automaticamente, e a polícia teria chegado em três minutos. Se a polícia tivesse chegado em três minutos, poderia ter alcançado o automóvel dos assaltantes. Mas não pôde alcançar o automóvel dos assaltantes. Portanto, o caixa não apertou o botão do alarme. (C, F, P, A)

5.2 REGRAS NÃO HIPOTÉTICAS DE INFERÊNCIA

As *regras de inferência* do cálculo proposicional podem gerar todas as formas de argumento válidas expressáveis em sua linguagem (e somente as formas válidas).

As regras de inferência geram as formas de argumento numa série de etapas simples e precisas de raciocínio, chamadas de *derivação* ou *prova*. Cada etapa numa prova é uma instância de uma das regras.

São dez as regras básicas que utilizaremos aqui - uma de introdução e uma de eliminação - para cada um dos cinco operadores lógicos.

Regra	Característica
Eliminação de operador	Permite inferir a partir de premissas nas quais o referido operador é principal
Introdução de operador	Permite inferir conclusões onde o referido operador é principal

Exemplo: Analisaremos a forma de argumento

$$A, C \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash B$$

Apresentamos uma "prova" da validade desse argumento, mostrando que B pode ser concluído das premissas. A maneira de apresentar as derivações efetuadas a seguir deverá ser o nosso padrão:

Premissas e inferências	Justificativas (regras utilizadas)
1) A	Premissa
2) $C \rightarrow B$	Premissa
3) $A \rightarrow C$	Premissa
$\vdash$ 4) C	1,2 (MP)
$\vdash$ 5) B	2,4 (MP)

Nessa prova, inferimos de "A" e "$A \rightarrow C$" a fbf "C", indicando com a sigla "MP" que a regra "Modus ponens" foi a utilizada nessa inferência. A mesma regra nos permite inferir "B" de "C" e "$C \rightarrow B$". Provamos, assim, que a conclusão "B" é derivada das premissas, i.e., que essa forma de argumento é válida. Assim, toda instância dessa forma (qualquer argumento que tiver a mesma estrutura) é válido.

Podemos apresentar, agora, as regras de inferência que permitirão que estabeleçamos provas da validade de formas de argumento.

Regra I - *Modus Ponens* (MP) - "De um condicional e seu antecedente, pode-se inferir seu conseqüente". Ou, de forma mais abreviada:

$$\phi, \phi \rightarrow \psi \vdash \psi$$

Essa maneira de apresentar as regras do cálculo é a maneira mais simples. Subentendemos que esse argumento apresentado é <u>válido como regra</u>. Lembremos que a utilização das letras gregas "ϕ" e "ψ" diz-nos que no lugar delas podem estar quaisquer fórmulas bem formadas, sejam elas atômicas ou compostas.

Exemplo: Provar a validade da forma de argumento.

$$\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$$

Prova:

1) $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	p
2) $\sim P$	p
3) Q	p
4) $Q \rightarrow R$	1,2 (MP)
5) R	3,4 (MP)

Nesse exemplo, omitimos o sinal "$\vdash$" das derivações de "$Q \rightarrow R$" e "R". Além disso, fizemos uso de nossa convenção de não escrevermos os parênteses em torno de "$Q \rightarrow R$", já que ela é a única fbf da linha. As linhas de (1) a (5) provam que a forma de argumento apresentado é válida.

Regra II - *Eliminação da negação* (~E):

$$\sim\sim\phi \vdash \phi$$

Exemplo: Provar a validade da forma de argumento a seguir.

$$\sim P \rightarrow \sim\sim Q, \sim\sim\sim P \vdash Q$$

prova:

1) $\sim P \rightarrow \sim\sim Q$	p
2) $\sim\sim\sim P$	p
3) $\sim P$	2 (~E)
4) $\sim\sim Q$	1,3 (MP)
5) Q	4 (~E)

Observação : É importante notar que a regra *eliminação de negação* <u>não nos permite</u> inferir da linha (1) ($\sim P \rightarrow \sim\sim Q$) a fbf "($\sim P \rightarrow Q$)". Precisamos, primeiro, utilizar a regra "MP" para inferirmos "$\sim\sim Q$" e depois utilizar a regra "~E". A eliminação de negação permite-nos remover dois sinais de negação somente se eles são símbolos externos de uma fbf e <u>todo</u> o restante da fbf está no seu escopo.

Regra III -*Introdução de conjunção* (&I) :

$\phi, \psi \vdash \phi \& \psi$

Regra IV - *Eliminação de conjunção* (&E): De uma conjunção, podemos inferir qualquer um de seus conjunctos.

$\phi \& \psi \vdash \phi$

$\phi \& \psi \vdash \psi$

Exemplo: Provar a validade das formas a seguir.

a) $P \rightarrow (Q \& R), P \vdash P \& Q$

Prova:

1) $P \rightarrow (Q \& R)$	p
2) P	p
3) Q&R	1, 2 (MP)
4) Q	3 (&E)
5) P&Q	2,4 (&I)

b) $P \& Q \vdash Q \& P$

Prova:

1) P&Q	p
2) P	1 (&E)
3) Q	1 (&E)
4) Q&P	2, 3 (&I)

Nesse exemplo, embora possa parecer evidente a validade dessa forma, ela pode ser provada pelo uso das duas regras "&E" e "&I". Poder-ser-ia insistir, colocando $\boldsymbol{\phi \& \psi \vdash \psi \& \phi}$ como uma das regras básicas, mas um dos objetivos que se tem ao se constituírem essas regras é que elas sejam em quantidade menor possível. Assim, todas as outras regras (em particular $\phi \& \psi \vdash \psi \& \phi$) serão derivadas dessas que forem predeterminadas.

Observação: Alguns autores utilizam-se de outras regras como sendo básicas, uma das quais essa que acabamos de mostrar a prova, e consideram as que utilizamos como *regras derivadas* pelo fato de que elas podem ser provadas a partir das regras que eles consideram básicas. Isso não constitui um problema, pois essas mesmas regras são prováveis a partir da estrutura básica que utilizaremos.

Regra V - *Introdução de disjunção* ($\vee$I):

$\phi \vdash \phi \vee \psi$

$\phi \vdash \psi \vee \phi$

I.e., de uma fbf "ϕ", podemos inferir qualquer uma das fbf "$(\phi\vee\psi)$" ou "$\psi\vee\phi)$", não importando que fbf seja "ψ". Essa regra, também chamada *adição*, é claramente válida. Uma vez que se saiba que "hoje é dia de feira na esquina", pode-se concluir que o enunciado "hoje é dia de feira na esquina ou o Grêmio perderá o campeonato" é verdadeiro. Sem dúvida, se hoje é dia de feira na esquina, então a disjunção de "hoje é dia de feira na esquina" com qualquer enunciado é verdadeira.

Exemplo: Prove:

a) $P \vdash (P\vee Q)\&(P\vee R)$

prova:

1) P	p
2) PVQ	1 ($\vee$I)
3) $P\vee R$	1 ($\vee$I)
4) $(P\vee Q)\&(P\vee R)$	2,3 (&I)

b) $P, \sim\sim(P\to Q) \vdash (R\&S)\vee Q$

prova:

1) P	p
2) $\sim\sim(P\to Q)$	p
3) $P\to Q$	2 (~E)
4) Q	1, 3 (MP)
5) $(R\&S)\vee Q$	4 ($\vee$I)

Regra VI - *Eliminação da disjunção* ($\vee$E):

$$\phi\vee\psi,\ \phi \to \chi,\ \psi\to\chi \vdash \chi$$

Assim, das premissas de que hoje é sábado ou domingo ("$(S\vee D)$"), de que se hoje é sábado então é fim-de-semana ("$(S\to F)$"), e de que se hoje é domingo então é fim-de-semana ("$(D\to F)$"), pode-se concluir que hoje é fim-de-semana; i.e.,

$$S\vee D,\ S\to F,\ D\to F \vdash F$$

é uma forma de argumento válida. A prova formal da validade dessa forma de argumento é:

1) $S\vee D$	p
2) $S\to F$	p
3) $D\to F$	p
4) F	1, 2, 3 ($\vee$E)

Observação: Alguns autores chamam essa regra de *dilema construtivo*. Outros, usam-na como uma das regras hipotéticas, das quais trataremos mais tarde.

Exemplo: Provar a validade da forma de argumento a seguir.

$$(P\vee Q)\&(P\vee R),\ P\rightarrow S,\ Q\rightarrow S,\ P\rightarrow T,\ R\rightarrow T \vdash S\&T$$

prova:

1) $(P\vee Q)\&(P\vee R)$	p
2) $P\rightarrow S$	p
3) $Q\rightarrow S$	p
4) $P\rightarrow T$	p
5) $R\rightarrow T$	p
6) $P\vee Q$	1 (&E)
7) $P\vee R$	1 (&E)
8) T	4, 5, 7 ($\vee$E)
9) S	2, 3, 6 ($\vee$E)
10) $S\&T$	8, 9 (&I)

Regra VII - *Introdução de bicondicional* ($\leftrightarrow$I):

$$\phi\rightarrow\psi,\ \psi\rightarrow\phi \vdash \phi\leftrightarrow\psi$$

Regra VIII - *Eliminação de bicondicional* ($\leftrightarrow$E):

$$\phi\leftrightarrow\psi \vdash \phi\rightarrow\psi$$
$$\phi\leftrightarrow\psi \vdash \psi\rightarrow\phi$$

Observamos que poderíamos ter escrito essa regra na forma do argumento válido $\phi\leftrightarrow\psi \vdash (\phi\rightarrow\psi)\&(\psi\rightarrow\phi)$, mas, se o tivéssemos feito, para inferirmos $\phi\rightarrow\psi$ de $\phi\leftrightarrow\psi$, teríamos que usar duas regras, a "$\leftrightarrow$E" e a "&E".

Exemplo: Provar a validade de cada uma das seguintes formas de argumento.

(a) $F\leftrightarrow(S\vee D),\ S \vdash F$
(b) $P\rightarrow Q,\ (P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P) \vdash P\leftrightarrow Q$
(c) $P\leftrightarrow Q \vdash Q\leftrightarrow P$
(d) $Q,\ Q\rightarrow R,\ Q\rightarrow S \vdash R\&S$

Prova da validade de (a):

1) $F\leftrightarrow(S\vee D)$	p
2) S	p
3) $(S\vee D)\rightarrow F$	1 ($\leftrightarrow$E)
4) $S\vee D)$	2 ($\vee$I)
5) F	3, 4 (MP)

Prova da validade de (b) :

1) $P \rightarrow Q$	p
2) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$	p
3) $Q \rightarrow P$	1, 2 (MP)
4) $P \leftrightarrow Q$	1, 3 ($\leftrightarrow$I)

Prova da validade de (c):

1) $P \leftrightarrow Q$	p
2) $P \rightarrow Q$	1 ($\leftrightarrow$E)
3) $Q \rightarrow P$	1 ($\leftrightarrow$E)
4) $Q \leftrightarrow P$	2, 3 ($\leftrightarrow$I)

Prova da validade de (d):

1) Q	p
2) $Q \rightarrow R$	p
3) $Q \rightarrow S$	p
4) S	1, 3 (MP)
5) R	1, 2 (MP)
6) R&S	4, 5 (&I)

5.3 REGRAS HIPOTÉTICAS DE INFERÊNCIA

Apresentamos, até agora, oito das dez regras básicas de inferência do cálculo proposicional. As duas restantes são de introdução de condicional e de negação, que diferem das outras por empregarem raciocínio *hipotético*. O raciocínio hipotético é chamado assim por ser baseado em hipóteses (suposições) elaboradas durante a fase de construção de uma prova formal de validade de argumento, com a finalidade de mostrar que uma conclusão particular segue daquelas suposições. Diferentes das outras suposições de uma prova (premissas), essas não são declaradas como verdadeiras; são, sim, "artifícios lógicos" que usamos como um tipo especial de estratégia de prova.

Consideremos como exemplo a seguinte forma de argumento:

$$I, (I\&C) \rightarrow \sim S, \sim S \rightarrow \sim A \vdash C \rightarrow \sim A$$

Um estudo cuidadoso do significado dessas formas nos leva a estabelecer rapidamente a validade desse argumento. Para construirmos uma prova formal de sua validade necessitamos das regras que já estabelecemos. Entretanto, vemos facilmente que aquelas regras são insuficientes (Não temos ainda uma regra do tipo "introdução de condicional"). Como o que queremos provar é que, dadas as premissas apresentadas, vale o condicional "C→~A", basta que tomemos como "hipótese" o antecedente "C" e, dessa hipótese, derivarmos o seu conseqüente "~A". A prova completa é a seguinte:

1) I	p

2)	$(I\&C)\rightarrow\sim S$	p
3)	$\sim S\rightarrow\sim A$	p
4)	$\mid$ C	H
5)	$\mid$ I&C	1,4 (&I)
6)	$\mid$ ~S	2,5 (MP)
7)	$\mid$ ~A	3,6 (MP)
8)	$C\rightarrow\sim A$	4-7 (PC)

As premissas, são, como sempre, relacionadas em primeiro lugar. A hipótese “C” é introduzida na linha 4 e designamos ‘H’ para indicar que ela é uma hipótese. Do lado esquerdo, iniciamos uma linha vertical para indicar a duração da parte hipotética referente a essa hipótese que fizemos (que chamaremos de *hipótese vigente*). As derivações da parte hipotética mostram que a partir da hipótese “C” podemos garantir ~A. Assim, na linha 8, abandonamos a hipótese e inferimos “$C\rightarrow\sim A$”. Nesta última etapa, citamos as linhas de 4 a 7 e a regra PC, que significa “prova do condicional”. PC é a nossa regra de introdução do condicional. Formalmente:

Prova do condicional (PC): Dada uma derivação de uma fbf ψ a partir de uma hipótese ϕ, podemos descartar a hipótese e inferir $\phi\rightarrow\psi$.

Em relação ao exemplo acima, ϕ é “C” e ψ é “~A”.

Para provar um condicional, a estratégia usual (a menos que algo mais simples seja evidente) é colocar como hipótese o seu antecedente e então derivar o seu conseqüente, por PC.

EXEMPLOS

1) Prove: $P\rightarrow Q, Q\rightarrow R \vdash P\rightarrow R$

Prova:

1)	$P\rightarrow Q$	p
2)	$Q\rightarrow R$	p
3)	$\mid$ P	H
4)	$\mid$ Q	1,3 (MP)
5)	$\mid$ R	2,4 (MP)
6)	$P\rightarrow R$	3-5 (PC)

2) Prove: $P \vdash (P\rightarrow Q)\rightarrow Q$

Prova:

1)	P	p
2)	$\mid$ $P\rightarrow Q$	H
3)	$\mid$ Q	1,2 (MP)
4)	$(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$	2-3 (PC)

3) Prove: $(P\&Q)\rightarrow R \vdash P\rightarrow(Q\rightarrow R)$

4) Prove: $P\vee Q \vdash Q\vee P$

5) Prove: $(P\&Q)\vee(P\&R) \vdash P\&(Q\vee R)$

Prova:

1)	$(P\&Q)\vee(P\&R)$	p
2)	$\vert\ P\&Q$	H
3)	$\vert\ P$	2 (&E)
4)	$\vert\ Q$	2 (&E)
5)	$\vert\ Q\vee R$	4 (∨I)
6)	$\vert\ P\&(Q\vee R)$	3, 5 (&I)
7)	$(P\&Q)\rightarrow(P\&(Q\vee R))$	2-6 (PC)
8)	$\vert\ P\&R$	H
9)	$\vert\ P$	8 (&E)
10)	$\vert\ R$	8 (&E)
11)	$\vert\ Q\vee R$	10 (∨I)
12)	$\vert\ P\&(Q\vee R)$	9,11 (&I)
13)	$(P\&R)\rightarrow(P\&(Q\vee R))$	8-12 (PC)
14)	$P\&(Q\vee R)$	1, 7, 13 (∨E)

Nessa última prova a estratégia foi, essencialmente, a mesma do problema anterior.

A última regra de inferência a ser introduzida a seguir, *redução ao absurdo* (RAA), também conhecida como "prova indireta", usa o raciocínio hipotético. RAA é a regra de introdução da negação. O procedimento sugere a própria estratégia: Supõe-se que alguma fórmula que queiramos provar não esteja valendo, isto é, supõe-se que valha a sua negação. A partir disso, concluímos uma "contradição" (uma contradição é qualquer fbf da forma $\phi\&\sim\phi$). Assim, podemos concluir com segurança que a nossa hipótese não vale, ou seja, vale a fórmula que queremos provar.

Redução ao absurdo (RAA): Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese ϕ, podemos descartar a hipótese e inferir $\sim\phi$.

Exemplo 6: Provar a validade da forma de argumento:

$$P\rightarrow Q,\ \sim Q \vdash \sim P$$

Prova:

1)	$P\rightarrow Q$	p
2)	$\sim Q$	p
3)	$\vert\ P$	H (p/ RAA)
4)	$\vert\ Q$	1,3 (MP)
5)	$\vert\ Q\&\sim Q$	2,4 (&I) (Contradição!)
6)	$\sim P$	3-5 (RAA)

Na hipótese de que valha "P" (linha 3), podemos concluir uma contradição (linha 5); assim, concluímos que "P" não pode valer, isto é, vale "~P" (linha 6). Colocamos a observação (p/ RAA) ao lado da indicação de hipótese na linha 3 para ficar claro que nosso objetivo é o de derivar uma contradição a partir dessa hipótese.

Exemplo 7: Provar a validade da forma de argumento:

$$P\leftrightarrow{\sim}Q \vdash {\sim}(P\&Q)$$

Prova:

1)	$P\leftrightarrow{\sim}Q$	p
2)	$\mid P\&Q$	H (p/ RAA)
3)	$\mid P$	2&E
4)	$\mid Q$	2&E
5)	$\mid P\rightarrow{\sim}Q$	1↔E
6)	$\mid {\sim}Q$	3,5 MP
7)	$\mid Q\&{\sim}Q$	4,6 (&I) (Contradição!)
8)	${\sim}(P\&Q)$	2-7 (RAA)

A regra RAA pode ser usada junto com ~E para derivar conclusões que não estão negadas. A estratégia, nesse caso, é colocar como hipótese a negação da conclusão e derivar uma contradição dessa hipótese. Então, deduzimos a dupla negação da conclusão por RAA e removemos as duas negações por ~E.

Exemplo 8: Prove

$${\sim}P \rightarrow P \vdash P$$

Exemplo 9: Prove a validade da forma de argumento

$$P\rightarrow Q \vdash {\sim}P\vee Q$$

Prova:

1)	$P\rightarrow Q$	p
2)	$\mid {\sim}({\sim}P\vee Q)$	H (p/ RAA)
3)	$\mid\ \mid P$	H (p/ RAA)
4)	$\mid\ \mid Q$	1,3 (MP)
5)	$\mid\ \mid {\sim}P\vee Q$	4 (∨I)
6)	$\mid\ \mid ({\sim}P\vee Q)\&{\sim}({\sim}P\vee Q)$	2, 5 (&I)
7)	$\mid {\sim}P$	3-6 (RAA)
8)	$\mid {\sim}P\vee Q$	7 (∨I)
9)	$\mid ({\sim}P\vee Q)\&{\sim}({\sim}P\vee Q)$	2, 8 (&I)
10)	${\sim}{\sim}({\sim}P\vee Q)$	2, 9 (RAA)
11)	${\sim}P\vee Q$	10 (~E)

Quando usamos o raciocínio hipotético, várias regras devem ser observadas:

1) *Cada hipótese introduz numa prova o início de uma nova linha vertical.* Essa linha continua até a hipótese ser descartada pela aplicação de PC ou de RAA.

2) *Nenhuma ocorrência de uma fórmula à direita de uma linha vertical pode ser citada em qualquer regra aplicada depois que terminar a linha vertical.* Isso é para garantir que a fórmula derivada da hipótese não seja indevidamente usada depois que a hipótese for descartada.

3) *Se duas ou mais hipóteses são vigentes simultaneamente, então a ordem na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa na qual elas são introduzidas*.

4) *Uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas.* As hipóteses que não são descartadas são premissas adicionais introduzidas como artifício auxiliar na prova.

Não há maneira correta de se construir uma prova. Se uma forma pode ser provada, ela pode ser provada por diferentes trocas de regras. Entretanto, as provas mais curtas, mais simples e mais fáceis são obtidas por uma estratégia baseada na estrutura da conclusão. As sugestões da Tabela 1 são guias úteis para o planejamento de uma tal estratégia. Geralmente, elas levam a provas razoavelmente eficientes, embora alguns problemas requeiram, ainda, habilidade e engenhosidade.

Tabela 1: Estratégias para prova

Se a condicional for um(a)	Então faça:
Fórmula Atômica	Se nenhuma estratégia é imediata, coloca-se como hipótese a negação da conclusão para RAA. Se isso for bem-sucedido, então a conclusão pode ser obtida depois de RAA, por ~E.
Fórmula Negada	Coloca-se como hipótese a conclusão, sem o símbolo de negação, para RAA. Se resultar uma contradição, a conclusão pode ser obtida por RAA.
Conjunção	Prove cada um dos conjunctos, separadamente, e então faça a conjunção deles com $\wedge$I.
Disjunção	Se uma premissa disjuntiva está presente, tenta-se provar os condicionais necessários para obter a conclusão por $\vee$E. Caso contrário, coloca-se como hipótese a negação da conjunção e tenta-se RAA. Algumas vezes, uma conclusão disjuntiva pode ser provada diretamente, provando-se um de seus disjunctos e aplicando-se $\vee$I.
Condicional	Coloca-se como hipótese o seu antecedente e deriva-se o seu conseqüente por PC.
Bicondicional	Use PC, duas vezes, para provar os dois condicionais necessários para obter a conclusão por $\leftrightarrow$I.

Se a estratégia da Tabela 1 falhar, tente o seguinte. Se uma premissa for disjuntiva, tente provar os condicionais necessários para obter a conclusão por $\vee$E. Se não, acrescente uma hipótese extra cuja negação será útil como uma premissa adicional e descarte essa hipótese extra o mais rápido possível, por RAA, para obter a sua negação. Se isso também falhar, tente a mesma coisa com uma hipótese diferente. Eventualmente (se a forma que está sendo provada é, de fato, válida), deve-se encontrar uma hipótese ou série de hipóteses que sirva para a prova.

Se a conclusão for mais complexa, diversas subestratégias precisam ser desenvolvidas. Por exemplo, se a conclusão for '$\sim P \wedge \sim Q$', a estratégia é provar cada um dos seus conjunctos, separadamente, e então uni-los por $\wedge$I. Como cada conjuncto é negado, a subestratégia para provar cada um deles é colocá-los como hipótese sem o sinal de negação e usar RAA. Assim, a prova consiste em duas derivações hipotéticas para RAA seguida de uma etapa de $\wedge$I, como no problema (1f) abaixo:

Exercícios

1) Forneça uma prova para as seguintes formas.
a) P, $\sim\sim(P\rightarrow Q) \vdash Q\vee\sim Q$
b) $P \vdash P\vee P$
c) $\sim(\sim P\wedge\sim Q), \sim P \vdash Q$
d) $\sim P\vee\sim Q \vdash \sim(P\wedge Q)$
e) $\sim(P\wedge Q) \vdash \sim P\vee\sim Q$
f) $\sim (P \vee Q) \vdash \sim P \wedge \sim Q$

As dez regras básicas de interferência apresentadas são completas no sentido de que elas geram uma prova para cada uma das muitas formas válidas expressas na linguagem da lógica proposicional. Elas também são *válidas* no sentido de que quando aplicadas elas geram somente formas válidas - nunca inválidas. Esses fatos são provados, mas as suas provas estão além do escopo deste material.

Apesar da completude destas dez regras básicas, é útil ter outras; essas novas regras, assunto a ser tratado a seguir, não nos habilitam a provar algo novo que não possa ser provado somente pelas dez regras básicas, mas elas nos ajudam a simplificar algumas provas.

5.4 REGRAS DERIVADAS

Toda instância de um argumento válido é uma forma válida. Assim, na prova da forma

$$\mathbf{P\rightarrow Q, \sim Q \vdash \sim P} \qquad \textbf{(5.1)}$$

estabelecemos a validade de qualquer argumento que resulta daquela forma substituindo 'P' e 'Q' por sentenças (não importando quão complexas sejam essas sentenças). Logo, para constituirmos uma instância dessa forma, podemos substituir as letras sentenciais por sentenças. Por exemplo:

Se está garoando ou nevando, então o céu não está claro.
Não é o caso que o céu não está claro.
∴Não é o caso que está garoando ou nevando.

(Neste caso 'P' representa 'Está chovendo ou nevando' e 'Q', 'O céu não está claro'.) Note que se formalizarmos este argumento a fim de revelar toda a sua estrutura, não obteremos a forma original, mas

$$\mathbf{(G \vee N) \rightarrow \sim C, \sim\sim C \vdash \sim (G \vee N)} \qquad \textbf{(5.2)}$$

a qual chama-se uma *instância substitutiva* da forma original. Uma instância substitutiva de uma fbf ou uma forma de argumento é o resultado de substituir algumas, ou mesmo nenhuma, de suas letras sentenciais por fbf, sendo que cada ocorrência de uma mesma letra sentencial é substituída pela mesma fbf. (Dissemos "nenhuma" em vez de "uma" para permitir que cada forma seja considerada como uma instância substitutiva dela mesma.) A segunda forma acima é uma instância substitutiva da primeira, da qual resulta pela substituição de cada ocorrência de 'P' por '$G \vee N$' e de cada ocorrência de 'Q' por '$\sim C$'. Ao provar a validade de uma forma, provamos a validade de todas as suas instâncias substitutivas. Assim, tendo provado a equação (5.1), se encontrarmos premissas '$(G \vee N) \rightarrow \sim C$' e '$\sim\sim C$' numa prova, saberemos que '$\sim(G \vee N)$' segue-se validamente (e analogamente para qualquer outra instância substitutiva da equação (5.1). Isso significa que podemos considerar a forma apresentada na equação (5.1) (e, na verdade, qualquer forma de argumento anteriormente provada) como uma regra de inferência válida. Para cada forma anteriormente provada, a *regra de inferência associada* é:

> <u>De premissas de qualquer instância substitutiva da forma, podemos inferir, validamente, a conclusão da instância substitutiva</u>.

Exemplo 2:
Se essa figura geométrica é um quadrado ou um triangulo, então ela é um polígono.
Não é o caso que essa figura geométrica é um polígono.
Portanto, não é o caso que essa figura geométrica é um quadrado ou um triângulo.

Substituindo ‘P’ por ‘essa figura geométrica é um quadrado ou um triângulo’ e ‘Q’, por ‘essa figura geométricas é um polígono’. Examinando a estrutura desse argumento mais detalhadamente, poderíamos formalizá-lo por:

$$(C \vee T) \rightarrow G, \sim G \vdash \sim(C \vee T)$$

(neste caso, ‘C’ representa ‘essa figura geométrica é um quadrado’, ‘T’, ‘essa figura geométrica é um triângulo’ e ‘G’, ‘essa figura geométrica é um polígono’). E essa forma representa, então, a ‘**instância substitutiva**’ da forma original. Logo, podemos inferir $\sim(C \vee T)$, usando a forma válida (5.1).

As regras de inferência que são obtidas dessa maneira, de formas anteriormente provadas, chamam-se *regras derivadas*. Muitas regras derivadas têm nomes próprios. A regra associada a equação (5.1) chama-se **modus tollens** (MT). Ela é usada na seguinte prova:

Prove a forma de argumento $(G \vee N) \rightarrow \sim C \vdash \sim\sim C \rightarrow \sim (G \vee N)$
Prova:

1)	$(G \vee N) \rightarrow \sim C$	p
2)	$\mid \sim\sim C$	H (p/ PC)
3)	$\mid \sim (G \vee N)$	1,2 MT
4)	$\sim\sim C \rightarrow \sim (G \vee N)$	2-3 PC

Agora, usando apenas as 10 regras básicas:
Prova:

1)	$(G \vee N) \rightarrow \sim C$	p
2)	$\mid \sim \sim C$	H (p/ PC)
3)	$\mid \; \mid G \vee N$	H (p/ RAA)
4)	$\mid \; \mid \sim C$	1,3 MP
5)	$\mid \; \mid \sim C \wedge \sim\sim C$	2,4 $\wedge$I
6)	$\mid \sim(G \vee N)$	3-5 RAA

7) $\sim{\sim}C \rightarrow {\sim}(G \vee N)$ 2-6 PC

Na seqüência do texto, numa prova pode-se usar qualquer fórmula anteriormente provada como uma regra derivada. Como justificativa, citamos as linhas usadas como premissas e o nome (se houver) da regra de derivada; senão, o número do problema no qual a forma foi provada. Dentre as regras derivadas já provadas, as mais úteis são:

Silogismo hipotético (SH): $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

As regras de absorção (ABS): $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow (P \wedge Q)$

Dilema construtivo (DC): $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$

Repetição (RE): $\varphi \vdash \varphi$

Contradição (CANTRAD): $\varphi, {\sim}\varphi \vdash \psi$

As ultimas duas regras derivadas são peculiares. A primeira, repetição (RE), permite repetir uma fbf que ocorreu anteriormente numa prova, desde que essa fbf não seja parte de uma derivação hipotética cuja hipótese foi descartada. A segunda, contradição (CONTRAD), permite inferir qualquer fbf de uma fbf e sua negação. As premissas desta forma são inconsistentes; dai, apesar de válida, a forma não tem instâncias corretas.

Exemplos

Prove as formulas:

1) $P \vdash Q \rightarrow P$

Solução

1)	P	p
2)	$\mid Q$	H (para PC)
3)	$\mid P$	1 RE
4)	$Q \rightarrow P$	2-3 PC

Agora, usando somente as regras básicas:

Solução

1)	P	p
2)	$\mid Q$	H (para PC)
3)	$\mid \mid {\sim}P$	H (para RAA)
4)	$\mid \mid P \wedge {\sim}P$	1, 3 $\wedge$I (Contradição)
5)	$\mid {\sim\sim}P$	3-4 (RAA)
6)	$\mid P$	5 ~E
7)	$Q \rightarrow P$	2-6 PC

2) P ├ P

Solução

1)	P	p

A 'prova' é a mais simples que você pode imaginar. A única etapa, linha 1, serve como premissa e conclusão. Não precisamos aplicar regras de inferência. Isso é perfeitamente legítimo, pois qualquer enunciado válido segue-se a parir dele. RE deve ser usada com cautela. Como todas as regras de interferência, RE está sujeita a restrições pois ela não se aplica em fbf pertencentes a uma derivação hipotética cuja hipótese tenha sido descartada.

3) P, ~P ├ Q (Regra derivada CONTRAD)

Solução

1)	P	p
2)	$\sim P$	p
3)	$\mid \sim Q$	H (para RAA)
4)	$\mid P \wedge \sim P$	1,2 ∧I (Contradição)
5)	$\sim\sim Q$	3-4 RAA
6)	Q	5 ~E

4) P ∨ Q, ~P ├ Q (Regra derivada SD)

Solução

1)	$P \vee Q$	p
2)	$\sim P$	p
3)	$\mid P$	H (para PC)
4)	$\mid Q$	2,3 CONTRAD
5)	$P \rightarrow Q$	3-4 PC
6)	$\mid Q$	H (para PC)
7)	$Q \rightarrow Q$	6-6 PC
8)	Q	1,5,7 ∨E

Agora, usando apenas as regras básicas.

Solução

1)	$P \vee Q$	p
2)	$\sim P$	p
3)	$\mid P$	H (para PC)
4)	$\mid \; \mid \sim Q$	H (para RAA)
5)	$\mid \; \mid P \wedge \sim P$	2,3 ∧I
6)	$\mid \sim\sim Q$	4-5 RAA
7)	$\mid Q$	6 ~E
8)	$P \rightarrow Q$	3-7 PC

9)	$\quad Q$	H (para PC)
10)	$Q \rightarrow Q$	9-9 PC
11)	Q	1,8,10 $\vee$E

5) $\sim P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \sim P \vee R, \sim Q \vdash S$

Solução

1)	$\sim P \rightarrow Q$	p
2)	$R \rightarrow S$	p
3)	$\sim P \vee R$	p
4)	$\sim Q$	p
5)	$Q \vee S$	1,2,3 DC
6)	S	4,5 SD

6) $P \rightarrow Q, (P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$

Solução

1)	$P \rightarrow Q$	p
2)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	p
3)	$\sim R$	p
4)	$P \rightarrow (P \wedge Q)$	1 ABS
5)	$P \rightarrow R$	2,4 SH
6)	$\sim P$	3,5 MT

5.5 TEOREMAS

Algumas fbf são prováveis sem quaisquer suposições não-hipotéticas. São os **teoremas** ou **leis** do cálculo proposicional. (Os teoremas são fbf cujas instâncias são, todas, logicamente necessárias.) Para indicar que uma fbf é Teorema, escrevemos o símbolo " $\vdash$" diante da fbf. Esse símbolo afirma que a fórmula à sua direita é provável usando somente as fórmulas á sua esquerda como premissas; logo, quando não há fórmulas á sua esquerda, ele afirma que a fórmula á sua direita é um teorema. A prova de um teorema se inicia com uma ou mais hipóteses que serão descartadas por PC ou RAA.

Exemplos

1) Prove o teorema: $\vdash \sim (P \wedge \sim P)$

Solução

1)	$\mid P \wedge \sim P$	H (para RAA)
2)	$\sim (P \wedge \sim P)$	1-1 RAA

Essa é a prova mais simples por RAA. A linha 1 serve como uma derivação hipotética, da qual "$P \wedge \sim P$" é a hipótese e também é a conclusão.

2) Prove o teorema: $\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$

Solução

1)	$\mid P$	H (para PC)
2)	$\mid P \vee Q$	1 $\vee$I
3)	$P \rightarrow (P \vee Q)$	1-2 PC

3) Prove o teorema: $\vdash P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

Solução

1)	$\mid P$	H (para PC)
2)	$\mid \; \mid P \rightarrow Q$	H (para PC)
3)	$\mid \; \mid Q$	1,2 MP
4)	$\mid (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$	2-3 PC
5)	$P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$	1-4 PC

4) Prove o teorema: $\vdash P \leftrightarrow \sim\sim P$

Solução

1)	$\mid P$	H (para PC)
2)	$\mid \; \mid \sim P$	H (para RAA)
3)	$\mid \; \mid P \wedge \sim P$	1,2 $\wedge$I (Contradição)
4)	$\mid \sim\sim P$	2-3 RAA
5)	$P \rightarrow \sim\sim P$	1-4 PC
6)	$\mid \sim\sim P$	H (para PC)
7)	$\mid P$	6 $\sim$E
8)	$\sim\sim P \rightarrow P$	6-7 PC
9)	$P \leftrightarrow \sim\sim P$	5,8 $\leftrightarrow$I

5) Prove o teorema: $\vdash P \vee \sim P$

Solução

1)	$\mid \sim (P \vee \sim P)$	H (para RAA)
2)	$\mid \; \mid P$	H (para RAA)
3)	$\mid \; \mid P \vee \sim P$	2 $\vee$I
4)	$\mid \; \mid (P \vee \sim P) \wedge \sim (P \vee \sim P)$	1,3 $\wedge$I (Contradição)
5)	$\mid \sim P$	2-4 RAA
6)	$\mid P \vee \sim P$	5 $\vee$I
7)	$\mid (P \vee \sim P) \wedge \sim (P \vee \sim P)$	1,6 $\wedge$I (Contradição)
8)	$\sim\sim (P \vee \sim P)$	1-7 RAA
9)	$P \vee \sim P$	8 $\sim$E

Toda instância substitutiva de um teorema é provável sob qualquer conjunto de suposições. Portanto, podemos introduzir, legitimamente, um teorema ou quaisquer de suas instâncias substitutivas como uma premissa adicional em qualquer linha de uma prova. A regra derivada que nos permite fazer isso se chama **introdução de teorema** (IT). Como as outras regras derivadas, o objetivo de IT é tornar as provas mais curtas e mais eficientes.

Exemplo

1) Prove o teorema: $\vdash (P \vee Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$

Solução

1) $P \vee \sim P$	IT
2) $P \rightarrow (P \vee Q)$	IT
3) $\sim P \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	IT
4) $(P \vee Q) \vee (\sim P \vee \sim Q)$	1,2,3 DC

Note que, ao usarmos IT, não citamos linha alguma, pois a instância do teorema não é inferida de qualquer premissa dada. É interessante provar este teorema sem utilizar IT.

5.6 EQUIVALÊNCIAS

Uma equivalência é um bicondicional que é um teorema. Se $\phi \leftrightarrow \Psi$ é uma equivalência, então ϕ e Ψ são interderiváveis. Assim, 'P' e '$\sim\sim$P' são interderiváveis em vista da equivalência já provada. Para provar uma equivalência, seguimos a estratégia usual para provar bicondicionais: prova-se os condicionais necessários para $\leftrightarrow$I, em provas separadas.

Exemplo

1) Prove a equivalência: $\vdash (P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$

Solução

1) $\mid P \rightarrow Q$	H (para PC)
2) $\mid\ \mid P \wedge \sim Q$	H (para RAA)
3) $\mid\ \mid P$	2 $\wedge$E
4) $\mid\ \mid Q$	1,3 MP
5) $\mid\ \mid \sim Q$	2 $\wedge$E
6) $\mid\ \mid Q \wedge \sim Q$	4,5 $\wedge$I
7) $\mid \sim(P \wedge \sim Q)$	2-6 RAA
8) $(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$	1-7 PC
9) $\mid \sim(P \wedge \sim Q)$	H (para PC)
10) $\mid\ \mid P$	H (para PC)
11) $\mid\ \mid\ \mid \sim Q$	H (para RAA)
12) $\mid\ \mid\ \mid P \wedge \sim Q$	10,11 $\wedge$I

13)	$(P \wedge \sim Q) \wedge \sim(P \wedge \sim Q)$	9,12 $\wedge$I
14)	$\sim\sim Q$	11-13 RAA
15)	Q	~E
16)	$P \rightarrow Q$	10-15 PC
17)	$\sim(P \wedge \sim Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$	9-16 PC
18)	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$	8,17 $\leftrightarrow$ I

Muitas equivalências têm nomes, como as regras derivadas. A Tabela 2 exibe algumas das equivalência mais importantes.

Tabela 2: Equivalências

Equivalência	Nome
$\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	Lei de De Morgan (DM)
$\sim(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$	Lei de De Morgan (DM)
$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$	Comutação (COM)
$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$	Comutação (COM)
$(P \vee (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$	Associação (ASSOC)
$(P \wedge (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$	Associação (ASSOC)
$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$	Distributiva (DIST)
$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$	Distributiva (DIST)
$P \leftrightarrow \sim\sim P$	Dupla negação (DN)
$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$	Transposição (TRANS)
$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$	Implicação material (IM)
$((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	Exportação (EXP)
$P \leftrightarrow (P \wedge P)$	Tautologia (TAUT)
$P \leftrightarrow (P \vee P)$	Tautologia (TAUT)

As equivalências representam uma regra especial nas provas. Se duas fórmulas são interderiváveis, uma delas pode ser substituída por *qualquer* ocorrência da outra, *numa fórmula toda ou numa subfórmula de uma fbf*. Se uma fórmula é obtida de uma outra por substituição, então é possível derivá-1a da outra usando somente as dez regras básicas de inferência. Por exemplo, como DN estabelece a interderivabilidade de "P" e "~~P", também garante que "$(Q \rightarrow \sim\sim P)$" é provável de "$(Q \rightarrow P)$". Toda equivalência pode ser tratada como uma regra de interferência que nos permite substituir cada uma das fbf interderiváveis por uma outra, ou uma fbf toda ou uma subfbf de uma fbf. Mais precisamente:

> Se ϕ e Ψ são interderiváveis e ϕ é uma subfbf da fbf χ, então de χ podemos inferir o resultado de substituir uma ou mais ocorrências de ϕ em χ por Ψ.

Como justificativa, citamos a linha na qual χ ocorre e o nome da equivalência ou (se não tiver nome) o número do problema ou exemplo no qual essa equivalência foi provada.

A prova de uma equivalência também estabelece a derivabilidade de todas as instâncias substitutivas daquela equivalência. Assim, DN assegura não só a interderivabi1idade de

"P" e "~ ~P",

mas também de

"Q" e "~ ~Q",

de

$$"S \wedge \sim R" \text{ e } "\sim\sim(S \wedge \sim R)",$$

e assim por diante. Portanto, DN pode ser usada para justificar a substituição de qualquer membro de um desses pares pelo outro.

Tal como as outras regras derivadas, as equivalências não permitem provar nada além do que as dez regras básicas provam. A vantagem de usá-las é que as provas se simplificam. As dez regras básicas estão relacionadas na Tabela 3 e as regras derivadas mais importantes estão resumidas na Tabela 4.

Tabela 3: As dez regras básicas

MP - Modus ponens: De um condicional e seu antecedente, infere-se o seu conseqüente.	1) P p 2) $P \to Q$ p 3) Q 1,2 MP
~E - Eliminação de negação: De uma fbf na forma $\sim\sim\phi$, infere-se ϕ.	1) $\sim\sim\phi$ p 2) ϕ 1 ~E
$\wedge$I - Introdução da conjunção: De quaisquer fbf ϕ e Ψ, infere-se a conjunção $\phi \wedge \Psi$.	1) ϕ p 2) Ψ p 3) $\phi \wedge \Psi$ 1,2 $\wedge$I
$\wedge$E - Eliminação da conjunção: De uma conjunção infere-se cada um de seus conjunctos.	1) $\phi \wedge \Psi$ p 2) ϕ 1 $\wedge$E
$\vee$I - Introdução da disjunção: De uma fbf ϕ, infere-se a disjunção de ϕ com qualquer fbf.	1) ϕ p 2) $\phi \wedge R$ 1 $\wedge$I
$\vee$E - Eliminação da disjunção: De fbfs de formas $P \vee Q$, $P \to R$ e $Q \to R$, infere-se R.	1) $P \vee Q$ p 2) $P \to R$ p 2) $Q \to R$ p 3) R 1,2,3 $\vee$E
$\leftrightarrow$I - Introdução do bicondicional: De fbfs de formas $\phi \to \Psi$ e $\Psi \to \phi$, infere-se $\phi \leftrightarrow \Psi$.	1) $P \to Q$ p 2) $Q \to P$ p 3) $P \leftrightarrow Q$ 1,2 $\leftrightarrow$I
$\leftrightarrow$E -Eliminação do bicondicional: De fbf da forma $\phi \leftrightarrow \Psi$, infere-se $\phi \to \Psi$ ou $\Psi \to \phi$.	1) $P \leftrightarrow Q$ p 2) $P \to Q$ 1 $\leftrightarrow$E
PC - Prova condicional: Exibida uma derivação de uma fbf Ψ a partir de uma hipótese ϕ, descarta-se a hipótese e infere-se $\phi \to \Psi$.	1) P H (p/ PC) 2) $\vdots$ 3) R 4) $P \to R$ 1-3 PC
RAA - Redução ao absurdo: Exibida uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese ϕ, descarta-se a hipótese e infere $\sim\phi$.	1) P H (p/ RAA) 2) $\vdots$ 3) $P \wedge \sim P$ 4) $\sim P$ 1-3 RAA

Tabela 4: As regras derivadas mais utilizadas

MT - Modus tollens: De fbfs de formas $\phi \to \Psi$ e $\sim\Psi$, infere-se $\sim\phi$.	1) $P \to Q$ p 2) $\sim Q$ p 3) $\sim P$ 1,2 MT
SH - Silogismo hipotético: De fbfs de formas $\phi \to \Psi$ e $\Psi \to R$, infere-se $\phi \to R$.	1) $P \to Q$ p 2) $Q \to R$ p 3) $P \to R$ 1,2 SH
ABS - Absorção: De uma fbf da forma $\phi \to \Psi$, infere-se $\phi \to (\phi \wedge \Psi)$.	1) $P \to Q$ p 2) $P \to (P \wedge Q)$ 1 ABS
DC - Dilema construtivo: De fbfs de formas $\phi \vee \Psi$, $\phi \to R$ e $\Psi \to S$, infere-se $S \vee Q$.	1) $P \vee Q$ p 2) $P \to R$ p 3) $Q \to S$ p 4) $R \vee S$ 1,2,3 DC

RE - Repetição: De qualquer fbf ϕ, infere-se ϕ.	1) P p 2) $\vdots$ 3) P 1 RE
CONTRAD - Contradição: De fbfs de formas ϕ e $\sim\phi$, infere-se qualquer fbf.	1) P p 2) ~P p 3) Q 1,2 CONTRAD
SD - Silogismo disjuntivo: De fbfs de formas $\phi\vee\Psi$ e $\sim\phi$, infere-se Ψ.	1) ~Q p 2) $Q\vee S$ p 3) S 1,2 SD
IT - Introdução de teorema: Qualquer instância substitutiva de um teorema pode ser introduzida em qualquer linha de uma prova.	Exemplos: 1) $P\vee\sim P$ 2) $P \to (P\vee Q)$
Equivalência: Introdução de equivalência (A abreviação usada depende da equivalência utilizada; veja Tabela 2) -- Se ϕ e Ψ são interderiváveis e ϕ é uma subfbf de alguma fbf R, de R infere-se o resultado da substituição de uma ou mais ocorrência de ϕ em R por Ψ.	Exemplos: 1) $P\leftrightarrow P\vee P$ TAUT 2) $\sim(P\vee Q)\leftrightarrow(\sim P\wedge\sim Q)$ DM

Exemplos

1) Prove $P\vee Q,\ \sim Q \vdash P$

Solução

1) $P \vee Q$ p
2) $\sim Q$ p
3) $Q \vee P$ 1 COM
4) P 2,3 SD

2) Prove: $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash \sim P\to (Q \wedge R)$

Solução

1) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ p
2) $P \vee (Q \wedge R)$ 1 DIST
3) $\sim\sim P \vee (Q\wedge R)$ 2 DN
4) $\sim P\to (Q \wedge R)$ 3 IM

3) Prove: $(\sim P \vee Q) \vee R, (Q \vee R) \to S \vdash P \to S$

Solução

4) Prove: $P \to (Q \to \sim R), R \vdash \sim P \vee \sim Q$

Solução

5) Prove: $\sim P \to P \vdash P$

Solução

6) Prove: $\sim P \vee \sim Q, R \rightarrow P, \sim \sim Q \vee \sim S \vdash \sim S \vee \sim R$

Solução